

# Modelli - Parte 1

**Michele Cirafici**

*Dipartimento di Matematica e Geoscienze & INFN & IGAP,  
Trieste, Italy*

Email: [mcirafici@units.it](mailto:mcirafici@units.it)

## Indice

<b>1</b>	<b>Alcune considerazioni introduttive</b>	<b>1</b>
1.1	Raffreddamento dei corpi . . . . .	1
1.2	Datazione col carbonio . . . . .	2
1.3	Richiami sulle equazioni differenziali del primo ordine . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Caduta di un grave</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Lancio di un oggetto in un campo gravitazionale uniforme</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Effetto della resistenza dell'aria e portanza</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Il problema a due corpi e le leggi di Keplero</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Modello di un goccia che cade nella nebbia</b>	<b>15</b>

### 1 Alcune considerazioni introduttive

In questa parte del corso ci occuperemo di sviluppare modelli matematici. Con questo intendiamo il processo di astrazione di un sistema reale (fisico, biologico, etc) in una serie di entità matematiche in relazione tra di loro, che catturano le proprietà del sistema originario che intendiamo studiare.

Questo processo si può schematizzare come segue:

1. Si considera un sistema, che può essere di origine fisica, biologica, chimica, o semplicemente astratta. Di questo sistema scegliamo gli elementi rilevanti a determinarne il comportamento. Ad esempio per un sistema meccanico articolato, le coordinate lagrangiane. Spesso la definizione di cosa è rilevante e cosa no, dipende dal tipo di domande che ci poniamo. Spesso chiameremo questi elementi *variabili di stato*, perché caratterizzano lo stato del sistema.
2. Si scrive una relazione tra gli elementi rilevanti. Questa relazione può essere di tipo differenziale, integrale, algebrica o più astratta. In certi casi è chiara dal formalismo esistente (ad esempio le equazioni di Eulero-Lagrange), in altri è il punto più delicato della modellizzazione (ad esempio se cerchiamo una relazione costitutiva per fluidi o gas)
3. La soluzione del modello. Questa può essere esatta o approssimata, analitica o numerica, o qualitativa.
4. Infine analizziamo i risultati per poterli comparare con gli esperimenti o con delle simulazioni.

In questo corso ci occuperemo solamente di modelli che possono essere ridotti ad equazioni differenziali ordinarie. Lo scopo del corso è quello di introdurre le idee alla base della modellizzazione matematica attraverso una serie di esempi, tratti dalle scienze naturali.

#### 1.1 Raffreddamento dei corpi

Consideriamo un corpo, ad una certa temperatura  $T$ . Osserviamo empiricamente che se questo corpo si trova in un ambiente a temperatura  $T^{\text{ext}}$  minore di  $T$ , si raffredda cedendo calore all'ambiente

circostante. Questo processo avviene tanto più rapidamente quanto è grande la differenza  $T - T^{\text{ext}}$ . Questo ci porta alla legge (di Newton (1642-1727))

$$\frac{dT}{dt} = -\kappa (T - T^{\text{ext}}). \quad (1.1)$$

Se  $T > T^{\text{ext}}$  la temperatura  $T$  deve diminuire e pertanto la sua derivata deve essere negativa. Ne concludiamo quindi che  $\kappa > 0$ . Data una condizione iniziale  $T(t = 0) = T_0$ , ci aspettiamo che la funzione  $T = T(t)$  sia tale da garantire l'esistenza e l'unicità della soluzione. L'equazione si integra immediatamente

$$T(t) = T^{\text{ext}} + (T_0 - T^{\text{ext}}) e^{-\kappa t}. \quad (1.2)$$

Perché questa equazione differenziale sia utile a descrivere un sistema, dobbiamo sapere cosa è  $\kappa$ .

Per conoscere il valore di  $\kappa$  dobbiamo determinare una procedura per misurarlo. Per farlo fissiamo ad esempio  $T^{\text{ext}} = 15^\circ\text{C}$  e pensiamo di misurare la temperatura del corpo  $T$  a due istanti differenti: a  $t_1 = 9 : 00$  am troviamo  $T(t_1) = 20^\circ\text{C}$  e a  $t_2 = 10 : 00$  am troviamo  $T(t_2) = 18^\circ\text{C}$ .

Allora nella nostra soluzione possiamo scrivere  $T(t_2) = T^{\text{ext}} + (T(t_1) - T^{\text{ext}}) e^{-\kappa(t_2 - t_1)}$  da cui risolviamo (misurando il tempo in minuti)

$$\kappa = -\frac{1}{60} \ln \frac{5}{3} \sim 0.00851/\text{min}. \quad (1.3)$$

In questo esempio abbiamo fatto delle scelte implicite, che sono alla base della modellizzazione. In primo luogo abbiamo dichiarato  $T = T(t)$  la nostra *variabile di stato*. Questa è la variabile che caratterizza lo stato del sistema, cioè stiamo assumendo che conoscerla equivale a determinare completamente il sistema almeno per quanto riguarda le domande a cui siamo interessati a rispondere. Abbiamo inoltre assunto che  $T$  sia differenziabile, cioè abbiamo dichiarato che appartiene ad un appropriato spazio di funzioni, e funzione solamente del tempo  $t$ . In un secondo momento abbiamo introdotto un operatore differenziale  $\frac{d}{dt}$  che agisce su questo spazio di funzioni. Il nostro modello consiste quindi in un'equazione differenziale per la variabile di stato che, partendo da dati iniziali, determini l'evoluzione del sistema ad un qualsiasi istante.

## 1.2 Datazione col carbonio

Il metodo di datazione con il carbonio si basa sul decadimento radioattivo del  $^{14}\text{C}$ , un isotopo instabile del carbonio, con 6 protoni e 8 neutroni. Il  $^{14}\text{C}$  decade attraverso il decadimento  $\beta$  in cui  $^{14}_6\text{C} \rightarrow ^{14}_7\text{N} + e^- + \bar{\nu}_e$ . Il processo elementare è la trasformazione di un neutrone in un protone, un elettrone ed un antineutrino, attraverso forze nucleari deboli.

L'idea alla base di questo metodo è che il  $^{14}\text{C}$  è presente nell'atmosfera con concentrazione costante, dove il suo decadimento è compensato dalla creazione di nuovi isotopi attraverso raggi cosmici. In particolare è presente negli esseri viventi, come le piante, con la stessa concentrazione che nell'atmosfera, da dove viene assorbito attraverso la respirazione.

Alla morte, un essere vivente cessa di assorbire  $^{14}\text{C}$  e quindi la sua concentrazione diminuisce con il tempo a causa del decadimento. La situazione è quindi simile al precedente caso: se abbiamo

ad esempio un reperto archeologico in legno o comunque in parte costituito da reperti organici, possiamo stimarne l'età misurandone la concentrazione di  $^{14}\text{C}$ .

Se denotiamo con  $Q(t)$  una certa funzione che misura la quantità di isotopi radioattivi, possiamo postulare l'equazione differenziale (di Rutherford in questo caso)

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\lambda Q(t). \quad (1.4)$$

Per fare le cose più semplici, consideriamo direttamente il numero  $N(t)$  di atomi di  $^{14}\text{C}$  e supponiamo che sia approssimabile con una funzione continua

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \longrightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (1.5)$$

Esattamente come nell'esempio precedente, adesso dobbiamo trovare un modo per determinare  $\lambda$ . In questo caso, i valori di  $\lambda$  sono universali per ogni isotopo e vengono espressi in funzione del *tempo di dimezzamento*  $\tau$ , il tempo richiesto perché metà degli atomi decadano. In formule

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda \tau} \longrightarrow \lambda = \frac{1}{\tau} \ln 2. \quad (1.6)$$

Ad esempio per  $^{14}\text{C}$ ,  $\tau = 5568$  anni (utile ad esempio per datare reperti archeologici) mentre per l'isotopo dell'Uranio  $^{238}\text{U}$ ,  $\tau = 4.468 \cdot 10^9$  anni (utile per datare fenomeni astrofisici). Quindi misurando  $N(t)$  per un reperto archeologico in legno, possiamo risalire alla sua epoca

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_0}{N(t)}. \quad (1.7)$$

Per questo metodo, Willard Libby (1908-1980) ha ricevuto il premio Nobel per la chimica nel 1960.

Un punto importante in questo esempio è che abbiamo trovato un'equazione differenziale formalmente identica a (1.1). Mentre in quel caso abbiamo potuto derivare l'equazione usando l'intuizione, in questo caso non sappiamo niente del processo dettagliato di decadimento del carbonio.

Stiamo usando uno dei principi fondamentali della modellizzazione matematica: stesse equazioni hanno le stesse soluzioni. Ovvero per modellizzare un fenomeno possiamo ricorrere ad un modello già risolto in un'altra situazione, se ci aspettiamo un andamento simile. Molti modelli nascono in questo modo: copiando ed eventualmente perturbando o modificando modelli già noti.

### 1.3 Richiami sulle equazioni differenziali del primo ordine

Prima di procedere rivediamo alcuni risultati sulle equazioni differenziali del primo ordine. Se  $f(t, x)$  è una funzione continua, abbiamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Sotto determinate condizioni ( $f$  continua e lipschitziana, ma andate a rileggere gli appunti di analisi) esiste un'unica soluzione definita in un intervallo attorno a  $t_0$ . Risultati di questo tipo sono essenziali perché un modello matematico sia *ben posto*, cioè descriva un fenomeno in maniera non ambigua.

Data una soluzione definita intorno a  $t_0$ , possiamo chiederci se è possibile *prolungare* questa soluzione in un intervallo più grande. Oltre al problema, puramente di analisi, del prolungamento delle soluzioni, dobbiamo però anche chiederci se le approssimazioni che abbiamo fatto per ottenere il nostro modello, valgono in un intervallo di tempo più grande (ad esempio effetti che abbiamo trascurato possono diventare importanti). Cioè quando possiamo fidarci del nostro modello?

Un altro aspetto importante è lo studio della dipendenza dai dati iniziali del problema. In generale può succedere che non conosciamo con precisione i dati iniziali del nostro modello, ad esempio può essere difficile misurarli; oppure possiamo essere in possesso di valori dei dati iniziali sbagliati, frutto di un errore di progettazione o simili. In tutti questi casi è importante stabilire il comportamento del nostro modello al variare dei dati iniziali.

Vediamo adesso qualche esempio di equazioni differenziali del primo ordine.

**Equazioni separabili.** Supponiamo di avere

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x)g(y). \quad (1.9)$$

Questa equazione si dice *separabile* (e nel caso  $f(x) = 1$  parliamo di sistema autonomo). La soluzione si ricava da

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C, \quad (1.10)$$

dove  $C$  è una costante e abbiamo assunto che la funzione  $g$  non si annulli nel dominio di integrazione. Prendiamo ad esempio  $y' = 2xy$  con condizione iniziale  $y(0) = 2$ . Allora

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx 2x + C, \quad (1.11)$$

da cui  $\ln|y| = x^2 + C$  che possiamo riscrivere come  $y(x) = Ae^{x^2}$ . Imponendo la condizione iniziale  $y(x) = 2e^{x^2}$

**Equazioni lineari.** Consideriamo

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x). \quad (1.12)$$

Per risolvere questa equazione scriviamola come una derivata totale

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y(x)) = \mu(x)q(x). \quad (1.13)$$

Per che scelta di  $\mu$  questa equazione coincide con (1.12)? Esplicitamente

$$\mu(x)y'(x) + \mu'(x)y(x) = \mu(x)q(x). \quad (1.14)$$

Se moltiplichiamo (1.12) per  $\mu(x)$  troviamo la condizione su  $\mu$

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)p(x) \implies \mu(x) = \exp \int^x p(\zeta)d\zeta. \quad (1.15)$$

Allora la soluzione di (1.12) è data da

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left( \int^x \mu(\zeta)q(\zeta)d\zeta + C \right). \quad (1.16)$$

Vediamo un esempio:  $xy' + y = x$  con  $x > 0$  e  $y(1) = 0$ . Se la riscriviamo come

$$y' + \frac{1}{x}y = 1, \quad (1.17)$$

troviamo

$$\mu(x) = \exp \int^x \frac{1}{\zeta}d\zeta = x \quad (1.18)$$

e quindi

$$y = \frac{1}{x} \left( \int^x d\zeta\zeta + C \right) = \frac{1}{x} \left( \frac{x^2}{2} + C \right) = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}. \quad (1.19)$$

## 2 Caduta di un grave

Cominciamo con il semplice esempio di un grave sottoposto alla sola azione della forza di gravità, assunta costante. Prendiamo un osservatore dotato di terna ortogonale positiva, in modo che la forza di gravità sia diretta come  $\underline{g} = -g\underline{e}_2$ , dove  $g = 9.81\text{m/s}^2$  vicino alla superficie della terra. Dalla legge di Newton  $\underline{F} = m\underline{a}$  troviamo il sistema

$$\begin{cases} \ddot{x}_2(t) = -g \\ x_2(0) = h \\ \dot{x}_2(0) = v_0 \end{cases}. \quad (2.1)$$

Questo problema ha la soluzione

$$x_2(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h. \quad (2.2)$$

Quanto sono valide le nostre assunzioni? Ad esempio abbiamo implicitamente deciso di schematizzare il nostro grave come un oggetto puntiforme. Ad esempio se il nostro oggetto fosse un corpo rigido, per comprenderne la dinamica dovremmo usare altre equazioni, che abbiamo visto nella meccanica analitica. Abbiamo anche trascurato la resistenza dell'aria: il nostro oggetto in realtà non si muove nel vuoto, ma in un fluido, l'aria. Un'altra approssimazione è che abbiamo considerato la forza di gravità come una costante. In realtà questa varia lentamente con la distanza dalla superficie della terra. Trascurare questa variazione non è più legittimo se supponiamo di lasciar cadere un oggetto da una grande altezza, ad esempio da un satellite. In questo caso l'equazione corretta diventa

$$m \frac{d^2x_2(t)}{dt^2} = -G \frac{m M_T}{(R_T + x_2(t))^2} \xrightarrow{R_T \gg x_2} -\frac{GmM_T}{R_T^2} = -mg, \quad (2.3)$$

che è considerevolmente più difficile e si riduce alla precedente se l'altezza a cui viene lasciato il grave è trascurabile rispetto al raggio della Terra  $R_T$

### 3 Lancio di un oggetto in un campo gravitazionale uniforme

Consideriamo ora il problema balistico del lancio di un oggetto in un campo gravitazionale uniforme<sup>1</sup>. Siamo interessati nello studio del moto dell'oggetto, e quindi ne individuamo la posizione attraverso una funzione vettoriale  $\underline{x}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . L'oggetto, che assumeremo puntiforme, viene lanciato da un'altezza  $h$  con una velocità iniziale  $v_0$  e un angolo  $\alpha$ . Questi parametri identificano i dati iniziali. Dall'equazione di Newton abbiamo

$$\begin{cases} \ddot{\underline{x}}(t) = (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3) = (0, -g, 0) \\ \underline{x}(0) = (0, h, 0) \\ \dot{\underline{x}}(0) = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha, 0) \end{cases} . \quad (3.1)$$

Questo sistema si risolve integrando

$$\begin{cases} x_1(t) = v_0 t \cos \alpha \\ x_2(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \alpha + h \\ x_3(t) = 0 \end{cases} . \quad (3.2)$$

In particolare l'orbita giace sul piano 1-2. Per descrivere la traiettoria eliminiamo  $t$  per trovare l'equazione di una parabola

$$x_2(t) = -\frac{1}{2} g \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x_1^2 + \tan \alpha x_1 + h . \quad (3.3)$$

In particolare il punto lungo l'asse  $e_1$  dove l'oggetto tocca terra è determinato dal valore di  $x_1$  tale che  $x_2(t) = 0$ :

$$L(\alpha) = \frac{v_0^2}{2g} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2 \alpha}} \right) \sin 2\alpha . \quad (3.4)$$

In generale per problemi di balistica, è interessante capire come ottenere il valore massimo di  $L(\alpha)$ , cioè come fare per lanciare il proiettile il più lontano possibile. Questo è un problema di *ottimizzazione*.

Poniamo  $X = \sin^2 \alpha$  e  $a = \frac{2gh}{v_0^2}$ . Allora scriviamo

$$L(\alpha) = F(X) = \frac{v_0^2}{g} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 X}} \right) \sqrt{X - X^2} . \quad (3.5)$$

Quindi

$$F'(X) = \frac{v_0^2}{g} \left[ \left( -\frac{1}{2} \frac{a}{X^2} \right) \frac{\sqrt{X - X^2}}{1 + \frac{a}{X}} + \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{a}{X}} \right) \frac{1 - 2X}{2\sqrt{X - X^2}} \right] = 0 , \quad (3.6)$$

---

<sup>1</sup>Per approfondimenti A. Fonda, Appunti al corso di modelli 2018/2019.

da cui troviamo

$$-a \left( \frac{1}{X} - 1 \right) + \sqrt{1 + \frac{a}{X}} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{a}{X}} \right) (1 - 2X) = -a + \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{a}{X}} \right) (1 - 2X) = 0, \quad (3.7)$$

risolto da

$$X_{\max} = \frac{1}{2 + a} = \frac{\frac{1}{2}v_0^2}{v_0^2 + gh}, \quad (3.8)$$

o equivalentemente

$$\alpha_{\max} = \arcsin \sqrt{\frac{\frac{1}{2}v_0^2}{v_0^2 + gh}} = \arctan \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}. \quad (3.9)$$

Ne segue che  $L(\alpha_{\max}) = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ . La traiettoria che corrisponde a questo valore è

$$x_2 = -\frac{g}{v_0^2} \frac{v_0^2 + gh}{v_0^2 + 2gh} x_1^2 + \frac{v}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} x_1 + h. \quad (3.10)$$

Per trovare l'altezza massima raggiunta possiamo determinare il valore di  $t$  per cui  $x_2(t)$  ha un massimo, da  $x_2'(t) = -gt + v_0 \sin \alpha_{\max}$ , e sostituire

$$x_2|_{\max} = -\frac{1}{2}g \left( \frac{v_0^2}{g^2} \sin^2 \alpha_{\max} \right) + v_0 \frac{v_0}{g} \sin^2 \alpha_{\max} + h = h + \frac{1}{4} \frac{v_0^4}{(v_0^2 + gh)g}. \quad (3.11)$$

Il tempo di volo, che possiamo calcolare con  $x_2(t_{\max}) = 0$ , è dato da  $t_{\max} \frac{1}{g} \sqrt{2(v^2 + gh)}$ .

Consideriamo alcuni limiti della soluzione ora trovata. Se in (3.9) trascuriamo  $h$ , cioè espandiamo per  $h$  piccolo e prendiamo il primo termine, troviamo  $\alpha_{\max} \sim \frac{\pi}{4}$ , indipendente da  $v$ , e  $L(\alpha_{\max}) = \frac{v^2}{g}$ . Prendiamo invece  $h > 0$  e finito. In questo caso per  $v$  grande abbiamo  $\alpha_{\max} \sim \frac{\pi}{4}$ , mentre per  $v$  piccolo abbiamo che  $\alpha_{\max}$  è piccolo. Se invece fissiamo  $v$  e prendiamo  $h$  molto grande, vediamo  $\alpha_{\max} \sim 0$ .

Vediamo un esempio. Consideriamo il caso di un atleta, impegnato nel salto in lungo. In questo caso prendiamo  $v = 10 \text{ m/s}$ ,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  e  $h = 0.5 \text{ m}$  (che misura l'altezza del baricentro prima del salto, che sarà zero dopo il salto). Con questi valori

$$\alpha_{\max} = \arctan \frac{10}{\sqrt{10^2 + 2 \cdot 9.8 \cdot 0.5}} = \arctan 0.914 = 42.4^\circ \quad (3.12)$$

Tuttavia questo valore va comparato con il valore osservato: la lunghezza del salto è massima per un intervallo di valori  $\alpha \sim 15^\circ - 27^\circ$ . La spiegazione di questa discrepanza è che per come è strutturato il fisico umano, non possiamo assumere che  $v$  e  $\alpha$  siano due variabili indipendenti. Ad esempio nel momento del salto riusciamo a sviluppare una forza maggiore nella direzione orizzontale, piuttosto che in quella verticale. Abbiamo quindi  $v = v(\alpha)$ . Un'espressione esplicita che sembra descrivere bene i dati sperimentali è la relazione lineare  $v(\alpha) = 14.8 - 0.08 \alpha$ .

#### 4 Effetto della resistenza dell'aria e portanza

L'analisi precedente aveva come punto di partenza l'ipotesi che potessimo trattare il proiettile come un oggetto puntiforme. In molte situazioni questa ipotesi non è realistica. Se l'oggetto non è più



puntiforme, esso risente della presenza dell'aria. Vediamo un modello che possa descrivere questa situazione. Introduciamo la forza di resistenza dell'aria, o *drag*, nelle nostre equazioni:  $m\underline{a} = \underline{F} + \underline{F}_D$ , dove  $\underline{F}$  indica la forza peso. La forza  $\underline{F}_D$  ha direzione contraria a quella del moto, e modulo

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho A v^2. \quad (4.1)$$

Abbiamo assunto che la forza di resistenza dell'aria dipenda da  $A$ , la sezione trasversale dell'oggetto, e da  $\rho$ , la resistenza dell'aria. Intuitivamente è chiaro che all'aumentare di questi parametri un oggetto risenta maggiormente della presenza dell'aria. Il coefficiente  $C_D$  è il coefficiente di *drag* e dipende dalla forma dell'oggetto (ad esempio  $C = 1$  per un cubo,  $C = 0.5$  per una sfera). Abbiamo inoltre assunto che la forza dipenda da  $v^2$  e in particolare non dipende dal segno della velocità, cioè ostacola sempre il moto di un oggetto in qualsiasi direzione esso si muova<sup>2</sup>.

Vediamo l'ordine di grandezza delle quantità introdotte. Ritorniamo per esempio al caso del salto in lungo. Prendiamo  $A = 0.75 \text{ m}^2$ ,  $m = 80 \text{ kg}$ , un coefficiente  $C_D = 0.75$  e una velocità al momento del salto  $v = 10 \text{ m/s}$ . Abbiamo

$$\frac{F_D}{m} = \frac{1}{2} \frac{0.7 \times 1.25 \cdot 75 \times 10^2}{80} \text{ m/s}^2 = 0.4 \text{ m/s}^2 \quad \text{vs} \quad \frac{F}{m} = g = 9.81 \text{ m/s}^2 \quad (4.2)$$

L'effetto è piccolo ma non del tutto trascurabile.

Il nostro sistema di equazioni differenziali diventa

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1(t) = -F_D \cos \theta \\ m \ddot{x}_2(t) = -F_D \sin \theta - m g \end{cases}, \quad (4.3)$$

dove  $\theta$  denota l'angolo tra il vettore tangente alla traiettoria e l'asse  $\underline{e}_1$ . Se poniamo  $\dot{x}_1 = v_1$  e  $\dot{x}_2 = v_2$  abbiamo quindi  $v_1 = v \cos \theta$ ,  $v_2 = v \sin \theta$  e  $v^2 = v_1^2 + v_2^2$ . Il nostro sistema diventa

$$\begin{cases} m \frac{d}{dt} v_1(t) = -\frac{1}{2} \rho A C_D v^2 \cos \theta = -\frac{1}{2} \rho A C_D v_1 v^2 \\ m \frac{d}{dt} v_2(t) = -g m - \frac{1}{2} \rho A C_D v^2 \sin \theta = -m g - \frac{1}{2} \rho A C_D v_2 v^2 \\ \frac{d}{dt} x_1(t) = v_1(t) \\ \frac{d}{dt} x_2(t) = v_2(t) \end{cases}. \quad (4.4)$$

Oppure ritornando alle variabili originarie

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = -\frac{1}{2m} C_D \rho A \dot{x}_1(t) \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)} \\ \ddot{x}_2(t) = -g - \frac{1}{2m} C_D \rho A \dot{x}_2(t) \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)} \end{cases}. \quad (4.5)$$

Questo sistema di equazioni differenziali è molto complicato e non ammette soluzioni analitiche.

<sup>2</sup>In realtà sono possibili altre funzioni, che corrispondono ai diversi regimi in cui un oggetto si muove in un fluido.

In prima approssimazione sostituiamo  $\sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)} = \langle v \rangle \sim 9.5\text{m/s}$  con una velocità media. Allora troviamo

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = -\lambda \dot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) = -g - \lambda \dot{x}_2(t) \end{cases} . \quad (4.6)$$

Dove

$$\lambda = \frac{C \rho A}{m} \langle v \rangle . \quad (4.7)$$

Questo sistema si può risolvere più facilmente.

### Richiami sulle equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine a coefficienti costanti.

Supponiamo di avere un operatore lineare  $L$  corrispondente all'equazione differenziale

$$a \ddot{y}(t) + b \dot{y}(t) + c y(t) = 0 = L[y] . \quad (4.8)$$

Questa equazioni ha soluzioni esponenziali. Prendiamo l'ansatz  $y(t) = e^{rt}$ . Sostituendo vediamo che il nostro ansatz è effettivamente soluzione se  $r$  soddisfa  $ar^2 + br + c = 0$ . Abbiamo quindi i seguenti casi

1. Radici reali e distinte:  $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ .
2. Radici reali e uguali<sup>3</sup>:  $y(t) = (c_1 + c_2 t) e^{rt}$ .
3. Radici complesse coniugate:  $r = \alpha \pm i\beta$ ,  $y(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$ .

Se l'equazione differenziale contiene un termine non omogeneo  $g$ , per risolverla dobbiamo sommare una soluzione generale ad una soluzione particolare. Vediamo perché. Adesso la nostra equazione è  $L[y] = g$ . Supponiamo di avere due soluzioni particolari  $\bar{y}_1$  e  $\bar{y}_2$ , cioè  $L[\bar{y}_1] = g$  e  $L[\bar{y}_2] = g$ . Allora per linearità  $L[\bar{y}_1 - \bar{y}_2] = L[\bar{y}_1] - L[\bar{y}_2] = 0$  risolve l'equazione omogenea. Allora deve essere  $\bar{y}_1 - \bar{y}_2 = c_1 y_1 + c_2 y_2$ , e cioè  $\bar{y}_1 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \bar{y}_2$ . A parole ogni soluzione dell'equazione non omogenea ha la forma di una soluzione generale dell'equazione omogeneo più una soluzione particolare.

Ritorniamo al nostro sistema. Possiamo scrivere la soluzione direttamente

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-\lambda t} + c_2 \\ x_2(t) = c_3 e^{-\lambda t} + c_4 - \frac{g}{\lambda} t \end{cases} . \quad (4.9)$$

Siccome il sistema non è omogeneo non dobbiamo dimenticarci la soluzione particolare, che si trova facilmente. Scegliamo condizioni iniziali, come nel primo esempio

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_1(0) = v_0 \cos \alpha \end{cases} , \quad \begin{cases} x_2(0) = h \\ \dot{x}_2(0) = v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad (4.10)$$

---

<sup>3</sup>L'intuizione dietro al termine lineare in  $t$  viene dal fatto che le due soluzioni devono essere funzionalmente indipendenti, cioè  $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$  solo quando i coefficienti si annullano. Questo è equivalente a dire che il rapporto  $y_1/y_2$  non è una costante. Quindi l'ansatz più semplice per trovare la seconda soluzione è prendere  $y_2 = t y_1$ .

Con queste condizioni troviamo la soluzione

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{v_0 \cos \alpha}{\lambda} (e^{-\lambda t} - 1) \\ x_2(t) = -\left(\frac{v_0 \sin \alpha}{\lambda} + \frac{g}{\lambda^2}\right) (e^{-\lambda t} - 1) - \frac{g}{\lambda} t + h \end{cases} \quad (4.11)$$

Come esercizio verificate che espandendo per  $\lambda$  piccoli, cioè  $e^{-\lambda t} \sim 1 - \lambda t + \frac{1}{2}\lambda^2 t^2 + \dots$ , ritroviamo la soluzione senza resistenza dell'aria.

Per trovare l'equazione della traiettoria, eliminiamo  $t$  dalla prima equazione

$$t = -\frac{1}{\lambda} \log \left( 1 - \frac{\lambda}{v_0 \cos \alpha} x_1 \right), \quad (4.12)$$

da cui

$$x_2(t) = \left( \tan \alpha + \frac{g}{\lambda v_0 \cos \alpha} \right) x_1 + \frac{g}{\lambda^2} \log \left( 1 - \frac{\lambda}{v_0 \cos \alpha} x_1 \right) + h. \quad (4.13)$$

Notiamo che il limite  $\lambda \rightarrow 0$  di questa traiettoria non è per niente ovvio, visto che  $t$  dipende da  $\lambda$ . In particolare adesso potremmo ripetere l'analisi di prima, e determinare  $L(\alpha_{\max})$ .

La resistenza dell'aria quindi è un fattore che rallenta il moto. Per superarla possiamo modificare le condizioni del lancio e dare una rotazione al nostro proiettile. Immaginiamo ad esempio di lanciare una palla. In questo caso imprimere una rotazione può contrastare la resistenza dell'aria: questo effetto è dovuto alla portanza, o *lift* ed è una caso particolare della forza di Magnus (1802-1870).

Questo effetto è in generale molto complicato, e dipende dalla particolare rotazione. Supponiamo che la rotazione avvenga nel piano 1-2. La forze di *lift* ha direzione ortogonale alla direzione della velocità e modulo

$$F_L = \frac{1}{2} C_L \rho A v^2, \quad (4.14)$$

con  $C_L > 0$  per *back spin* e  $C_L < 0$  per *top spin*. Quindi

$$\begin{cases} m \frac{d}{dt} v_1(t) = -\frac{1}{2} \rho A (C_D \cos \theta + C_L \sin \theta) v^2 = -\alpha (C_D v_1 + C_L v_2) \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\ m \frac{d}{dt} v_2(t) = -g m - \frac{1}{2} \rho A (C_D \cos \theta - C_L \sin \theta) v^2 = -m g - \alpha (C_D v_1 - C_L v_2) \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \end{cases} \quad (4.15)$$

È adesso la *competizione* tra i due coefficienti  $C_D$  e  $C_L$  a determinare il moto.

## Riduzione di un'equazione del secondo grado a un sistema di equazioni del primo grado.

L'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'' = f(y) \\ y'(0) = y_1 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (4.16)$$

è equivalente a

$$\begin{cases} y' = p & y(0) = y_0 \\ p' = f(y) & p(0) = y_1 \end{cases} \quad (4.17)$$

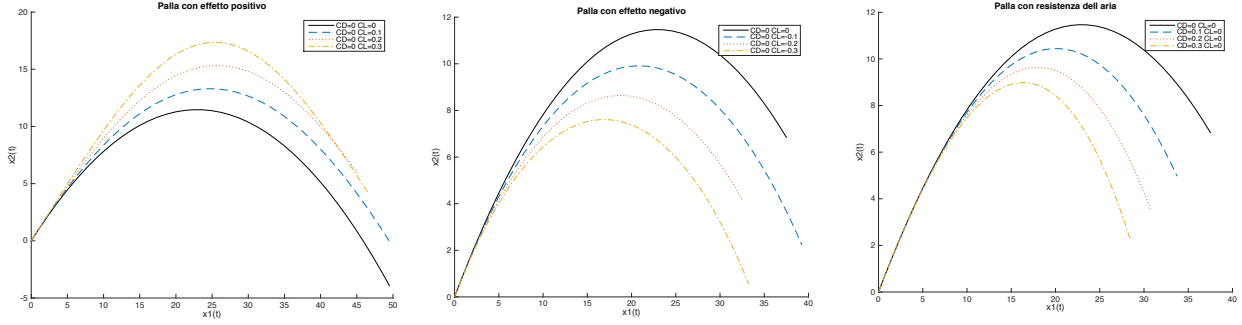


Figura 1: Traiettorie di una palla considerando anche la resistenza dell'aria e la portanza. Notate la traiettoria di controllo con  $C_D = C_L = 0$ .

Questo è immediato visto che  $y'' = p' = f(y)$ . Lo spazio  $(p, y)$  si dice *spazio delle fasi*.

Nel nostro caso troviamo il sistema

$$\frac{d}{dt}\underline{y} = \underline{\mathcal{F}}(t, \underline{y}) \quad (4.18)$$

con  $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1, x_2, v_1, v_2)$ . Esplicitamente

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y_1 = y_3 \\ \frac{d}{dt}y_2 = y_4 \\ \frac{d}{dt}y_3 = -\alpha(C_D y_3 + C_L y_4) \sqrt{y_3^2 + y_4^2} \\ \frac{d}{dt}y_4 = -mg - \alpha(C_D y_4 - C_L y_3) \sqrt{y_3^2 + y_4^2} \end{cases} \quad (4.19)$$

Vogliamo ad esempio determinare le traiettorie nel piano  $(y_1, y_2) = (x_1, x_2)$ . Possiamo farlo numericamente, e il risultato è illustrato in Figura 1.

## 5 Il problema a due corpi e le leggi di Keplero

Consideriamo ora il moto di un oggetto in un campo gravitazionale, soggetto ad una forza  $F = G\frac{mM}{d^2}$  determinata da un corpo più massivo  $M \gg m$ , ad esempio la Terra. Abbiamo

$$\ddot{\underline{x}}(t) = -\frac{GM}{|\underline{x}(t)|^3} \underline{x}(t), \quad (5.1)$$

dove  $\underline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  e il moto avviene nel piano 1-2. In coordinate polari

$$\underline{x}(t) = (\rho(t) \cos \theta(t), \rho(t) \sin \theta(t)), \quad (5.2)$$

da cui

$$\dot{\underline{x}}(t) = \left( \dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta, \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta \right). \quad (5.3)$$

Quindi troviamo il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \ddot{\rho} \cos \theta - 2\dot{\rho}\dot{\theta} \sin \theta - \rho\ddot{\theta} \sin \theta - \rho\dot{\theta}^2 \cos \theta = -\frac{GM}{\rho^2} \cos \theta \\ \ddot{\rho} \sin \theta + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \cos \theta + \rho\ddot{\theta} \cos \theta - \rho\dot{\theta}^2 \sin \theta = -\frac{GM}{\rho^2} \sin \theta \end{cases} . \quad (5.4)$$

Da queste due equazioni troviamo

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = \frac{GM}{\rho} \\ -2\dot{\rho}\dot{\theta} - \rho\ddot{\theta} = 0 \end{cases} . \quad (5.5)$$

Il sistema è stato ottenuto moltiplicando la prima equazione per  $\cos \theta$  e la seconda per  $\sin \theta$  e sommandole; moltiplicando la prima equazione per  $\sin \theta$  e la seconda per  $\cos \theta$  e sottraendole.

Notiamo dalla seconda equazione

$$\frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\theta}) = 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho^2\ddot{\theta} = \rho(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) = 0 \quad (5.6)$$

Quindi  $\mu = \rho^2 \dot{\theta}$  è una quantità conservata. Infatti dalla meccanica riconosciamo il momento angolare

$$\begin{aligned} \underline{L} &= \underline{r} \wedge \underline{p} = (\rho \cos \theta \underline{e}_1 + \rho \sin \theta \underline{e}_2) \wedge m \left[ (\dot{\rho} \cos \theta - \rho\dot{\theta} \sin \theta) \underline{e}_1 + (\dot{\rho} \sin \theta + \rho\dot{\theta} \cos \theta) \underline{e}_2 \right] \\ &= m \left( \rho\dot{\rho} \sin \theta \cos \theta + \rho^2 \dot{\theta} \cos^2 \theta - \rho\dot{\rho} \sin \theta \cos \theta + \rho^2 \dot{\theta} \sin^2 \theta \right) \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Allora  $\mu = \rho^2 \dot{\theta}$  è una costante del moto. In particolare possiamo scegliere  $\mu > 0$ , per cui  $\dot{\theta}(t) > 0$ , il che determina il verso di rotazione.

Abbiamo ridotto il problema al sistema di equazioni

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \frac{\mu^2}{\rho^3} + \frac{GM}{\rho} = 0 \\ \dot{\theta} = \frac{\mu}{\rho^2} \end{cases} . \quad (5.8)$$

Da questo sistema possiamo trovare una relazione funzionale tra  $\rho$  e  $\theta$  che descriva l'orbita del moto, esattamente come abbiamo fatto nei precedenti esempi. Questa relazione sarà determinata usando  $\mu = \rho^2 \dot{\theta}$ .

Cerchiamo  $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ , tale che  $\rho(t) = \mathcal{F}(\theta(t))$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Introduciamo anche  $\mathcal{G}(\theta) = 1/\mathcal{F}(\theta)$ . Allora vediamo che

$$\dot{\rho}(t) = \mathcal{F}'(\theta(t)) \dot{\theta}(t) = -\frac{1}{\mathcal{G}(\theta(t))^2} \mathcal{G}'(\theta(t)) \frac{\mu}{\rho^2} = -\frac{1}{\mathcal{G}^2(\theta(t))} \mathcal{G}'(\theta(t)) \mu \mathcal{G}(\theta(t))^2 = -\mu \mathcal{G}'(\theta(t)). \quad (5.9)$$

Derivando una seconda volta

$$\ddot{\rho}(t) = -\mu \mathcal{G}''(\theta(t)) \dot{\theta}(t) = -\mu \mathcal{G}''(\theta(t)) \frac{\mu}{\rho^2(t)} = -\mu^2 \mathcal{G}''(\theta(t)) \mathcal{G}(\theta(t))^2. \quad (5.10)$$

Quindi scriviamo la relazione funzionale tra  $\rho$  e  $\theta$  come

$$-\mu^2 \mathcal{G}''(\theta(t)) \mathcal{G}(\theta(t))^2 - \mu^2 \mathcal{G}(\theta(t))^3 + GM \mathcal{G}(\theta(t))^2 = 0, \quad (5.11)$$

o equivalentemente

$$\mathcal{G}''(\theta(t)) + \mathcal{G}(\theta(t)) = \frac{GM}{\mu^2}. \quad (5.12)$$

Questa è un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti, con termine non omogeneo, del tipo  $L[y] = y'' + y = a$ . Per risolvere il problema omogeneo, proviamo con  $y = e^{rx}$ . Troviamo che per avere una soluzione deve essere  $r^2 + 1 = 0$ . Quindi  $y = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}$ , dove dobbiamo avere  $c_1^* = c_2$  affinché la soluzione sia reale.

Allora

$$\mathcal{G}(\theta(t)) = \frac{GM}{\mu^2} + \frac{1}{2}\gamma_0 e^{-i\theta_0} e^{i\theta(t)} + \frac{1}{2}\gamma_0 e^{i\theta_0} e^{-i\theta(t)} = \frac{GM}{\mu^2} + \gamma_0 \cos(\theta(t) - \theta_0), \quad (5.13)$$

dove  $\gamma_0$  e  $\theta_0$  parametrizzano i dati iniziali. Se ci ricordiamo che  $\rho = \frac{1}{\mathcal{G}}$ ,

$$\rho(t) = \frac{1}{\frac{GM}{\mu^2} + \gamma_0 \cos(\theta(t) - \theta_0)}, \quad (5.14)$$

che è l'equazione di un'ellisse. Per comodità poniamo  $\theta_0 = 0$  (sarebbe l'angolo tra il semiasse maggiore e l'asse  $\underline{e}_1$ ):

$$\rho(t) = \frac{l}{1 \pm \epsilon \cos \theta(t)}, \quad (5.15)$$

dove  $l = \frac{\mu^2}{GM}$  e  $\epsilon = \frac{\mu^2 |\gamma_0|}{GM}$ .

Infatti, un'ellisse è definita dal luogo di punti a distanza costante da due fuochi. Indichiamo con  $2c$  la distanza tra i fuochi,  $a$  il semiasse maggiore e  $b$  il semiasse minore. Allora, se  $F_1$  e  $F_2$  denotano i due fuochi, la condizione che il punto  $P$  abbia distanza costante dai fuochi lungo la curva è  $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ . Scegliendo uno dei fuochi come origine

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - 2c)^2 + y^2} = 2a \quad (5.16)$$

In coordinate polari  $P = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$

$$\rho + \sqrt{(\rho \cos \theta - 2c)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta} = 2a \quad (5.17)$$

da cui vediamo subito

$$\rho = \frac{l}{1 - \epsilon \cos \theta} \quad (5.18)$$

con  $l = b^2/a$  e  $\epsilon = c/a$  è l'eccentricità (e il segno meno cambierebbe scegliendo l'altro fuoco). In particolare l'area dell'ellisse è data da

$$A = \pi a b = \frac{\pi l}{\sqrt{(1 - \epsilon^2)^3}}. \quad (5.19)$$

Ritornando al nostro problema, vediamo che per  $\epsilon = \frac{\mu^2 |\gamma_0|}{GM} < 1$  l'orbita è un'ellisse, con uno dei due fuochi nell'origine.

Abbiamo quindi derivato una delle leggi di Kepler, che l'orbita è ellittica (per  $\epsilon < 1$ , o sferica se  $\epsilon = 0$ ; i casi  $\epsilon = 1$  e  $\epsilon > 1$  corrisponderebbero a una parabola o un'iperbole).

Andiamo a vedere le altre due. La seconda legge dice che il vettore che indica la posizione del satellite spazza aree uguali i tempi uguali. Se denotiamo con  $A(t)$  l'area spazzata, e poniamo  $x(\tau) = (\rho(\tau) \cos \theta(\tau), \rho(\tau) \sin \theta(\tau))$  in coordinate polari centrate su uno dei due fuochi, dove  $\tau$  varia da 0 a  $t$ . Allora

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \int_0^{\rho(t)} r dr d\vartheta = \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \left( \int_0^{\mathcal{F}(\vartheta(t))} r dr \right) d\vartheta \\ &= \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{1}{2} \mathcal{F}^2(\vartheta) d\vartheta = \int_0^t \frac{1}{2} \mathcal{F}^2(\theta(\tau)) \dot{\theta}(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \mu t \end{aligned} \quad (5.20)$$

dove abbiamo usato che  $\mu = \rho^2 \dot{\theta}$  è una costante positiva e quindi la funzione  $\tau \rightarrow \theta(\tau)$  è strettamente crescente. Concludiamo che

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{2} \mu \quad (5.21)$$

è una costante.

Per finire chiamiamo  $T$  il periodo. Dai calcoli appena fatti vediamo che  $\frac{1}{2} \mu T = \pi ab$ . Ricordando che  $l = \frac{b^2}{a} = \frac{\mu^2}{GM}$  troviamo

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu^2} a^3 \frac{b^2}{a} = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad (5.22)$$

che è la terza legge di Kepler.

Andiamo a vedere qualche valore per i parametri. Consideriamo un satellite che orbita intorno alla terra, e assumiamo che la sua altezza sia trascurabile, cioè  $r \sim R_T$ . Allora  $R_T = 6.37 \cdot 10^6$  m e  $M_T = 5.97 \cdot 10^{24}$  kg e  $G = 6.674 \cdot 10^{-11}$  m<sup>7</sup>/kgs<sup>2</sup>. Quindi

$$T \sim \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_T} R_T^3} \sim 5060 \text{ s} \quad (5.23)$$

che corrisponde ad una velocità di circa  $\frac{2\pi R_T}{T} \sim 7910$  m/s = 28475 km/h. Questo è consistente con quanto vediamo dall'esperienza, ad esempio la International Space Station, orbita intorno alla terra ad un'altezza di circa 400km, ha una velocità di  $v \sim 27576$  km/h e un periodo di circa un'ora e mezza.

Un ultimo commento; da quanto abbiamo visto un satellite lanciato in orbita, troverà una configurazione di equilibrio in un'orbita ellittica o circolare. Possiamo usare questo fatto, per lanciare delle sonde all'interno del sistema solare, facendole saltare da orbita in orbita. Una manovra del genere è il cosiddetto *Hohmann transfer*. Supponiamo ad esempio di avere una sonda che si muove su un'orbita (approssimativamente) sferica intorno alla terra. Vogliamo farla saltare su un'altra orbita, per esempio quella della luna. Per farlo possiamo cercare un'orbita ellittica, che sia tangente ad entrambe le orbite in due punti. Quando la sonda si trova nel primo punto della prima orbita,

un'accelerazione improvvisa la fa saltare sull'orbita ellittica, fino a raggiungere il secondo punto. In quel punto, un secondo cambio della velocità le fa abbandonare l'orbita ellittica, e saltare sulla seconda orbita. I valori particolari per le velocità necessarie a cambiare di orbita, si trovano dalla conservazione dell'energia. Con questo meccanismo (e sue generalizzazioni), utilizzando l'attrazione gravitazionale dei pianeti, siamo in grado di mandare sonde sino alle regioni più lontane del sistema solare.

## 6 Modello di un goccia che cade nella nebbia

In tutti gli esempi visti finora abbiamo assunto che la massa del corpo fosse una costante. In questo esempio consideriamo un caso in cui questa approssimazione non è più valida: quello di una goccia d'acqua che cade nella nebbia. La nebbia è un fenomeno atmosferico che consiste in piccole goccioline d'acqua sospese nell'atmosfera. Mentre la goccia cade, la sua massa aumenta a causa della nebbia. In prima approssimazione trascuriamo la resistenza dell'aria. Prendiamo l'asse  $\underline{e}_1$  diretto verso il basso, in modo che  $\underline{g} = g\underline{e}_1$ . Allora l'equazione di Newton assume la forma

$$\frac{d}{dt}p = \frac{d}{dt}(mv) = mg, \quad (6.1)$$

e cioè

$$m \frac{d}{dt}v = mg - v \frac{d}{dt}m. \quad (6.2)$$

Scriviamo adesso un modello per  $\frac{d}{dt}m$ . L'idea è di prendere

$$\frac{d}{dt}m = \lambda m^\sigma v^\beta, \quad \lambda > 0. \quad (6.3)$$

Abbiamo due casi<sup>4</sup>

1. La crescita della massa dipende dall'area della superficie,  $\sigma = \frac{2}{3}$ ,  $\beta = 0$ . Infatti  $m = \rho_d \frac{4}{3} \pi r^3$  e  $A = 4\pi r^2$  da cui  $\frac{d}{dt}m \sim A$  implica  $\frac{d}{dt}m \sim m^{2/3}$ .
2. La crescita della massa dipende dal volume spazzato dalla goccia,  $\sigma = \frac{2}{3}$ ,  $\beta = 1$ . In questo caso  $\Delta m \sim A \cdot (v\Delta t)$  e quindi  $\frac{d}{dt}m \sim Av \sim m^{2/3}v$ .

Per studiare il sistema, è più utile reinterpretare queste due situazioni in termini del raggio effettivo  $r$  della goccia, assumendo che rimanga sferica. Questo e la massa sono legati da  $m = \frac{4}{3}\pi\rho_d r^3$ . Pertanto

$$\frac{d}{dt}m \sim r^2 \frac{d}{dt}r \sim m^{2/3} \frac{d}{dt}r. \quad (6.4)$$

Allora il modello precedente diventa

$$\frac{d}{dt}r(t) = \gamma r^\alpha v^\beta, \quad \gamma > 0, \quad (6.5)$$

dove possiamo ritrovare i due casi precedenti

1.  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ . Per cui  $\frac{d}{dt}m \sim m^{2/3}$ .

---

<sup>4</sup>Vedere A. D. Sokal "The falling raindrop, revisited", Am. J. Phys. 78, 643-645 (2010), arXiv:0908.0090 e B. F. Edwards, J. W. Wilder, and E. E. Scime, "Dynamics of Falling Raindrops", Eur. J. Phys. 22, 113-118, (2001).



2.  $\alpha = 0, \beta = 1$ . Per cui  $\frac{d}{dt}m \sim m^{2/3}v$ .

Facendo i calcoli

$$\frac{v}{m} \frac{dm}{dt} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho_d r^3} v \frac{d}{dt} \left( \frac{4}{3}\pi\rho_d r^3 \right) = 3 \frac{v}{r} \frac{dr}{dt} = 3\gamma r^{\alpha-1} v^{\beta+1}. \quad (6.6)$$

Riassumendo abbiamo trovato il sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = g - 3\gamma r^{\alpha-1} v^{\beta+1} \\ \frac{dr}{dt} = \gamma r^\alpha v^\beta \end{cases}. \quad (6.7)$$

che possiamo prendere con condizioni iniziali  $r(0) = r_0$  e  $v(0) = 0$ . Ricordiamoci che  $r$  è il raggio della goccia, non la sua posizione! Vogliamo determinare  $v = v(r)$ , cioè come varia la velocità in funzione del raggio della goccia (e quindi in funzione della massa della goccia).

Ad esempio per  $\alpha = 0, \beta = 0$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = g - 3\gamma \frac{v}{r} \\ \frac{dr}{dt} = \gamma \end{cases}. \quad (6.8)$$

Siccome

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = \gamma \frac{dv}{dr}, \quad (6.9)$$

troviamo l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$\frac{dv}{dr} + \frac{3}{2}v = \frac{g}{\gamma}, \quad (6.10)$$

con  $v(r_0) = 0$ , che ha come soluzione

$$v(r) = \frac{g}{4\gamma} r \left( 1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^4 \right). \quad (6.11)$$

Per  $r$  grande  $v(r) \sim \frac{g}{4\gamma} r$ , da cui troviamo il valore limite  $\frac{dv}{dt} \sim \frac{g}{4}$ .

Andiamo a vedere il caso  $\alpha = 0, \beta = 1$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = g - 3\gamma \frac{v^2}{r} \\ \frac{dr}{dt} = \gamma v \end{cases}. \quad (6.12)$$

Adesso

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr} \gamma v, \quad (6.13)$$

e troviamo l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$\gamma v \frac{dv}{dr} = g - 3\gamma \frac{v^2}{r}, \quad (6.14)$$

con  $v(r_0) = 0$ . Esattamente come prima quest'equazione ha un fattore integrante  $r^6$ . Possiamo riscriverla come

$$\frac{d}{dr}(r^6 v^2) = 6r^5 v^2 + r^6 \frac{dv^2}{dr} = r^6 \left( \frac{dv^2}{dr} + \frac{6}{r} v^2 \right) = 2 \frac{g}{\gamma} r^6. \quad (6.15)$$

Possiamo risolvere quest'equazione in termini di  $v^2$

$$v^2 = \frac{1}{r^6} \left( \frac{2g}{7\gamma} r^7 + \text{const} \right), \quad (6.16)$$

dove fissiamo la costante imponendo la condizione iniziale  $v(r_0) = 0$ . Troviamo la soluzione

$$v(r) = \left( \frac{2g}{7\gamma} r \left( 1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^7 \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.17)$$

Per  $r$  grande  $v(r) \sim \sqrt{\frac{2g}{7\gamma}} r$ , da cui troviamo il valore limite  $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} \sim \frac{g}{7}$ . Abbiamo usato

$$v = \sqrt{\frac{2g}{7\gamma}} r \sqrt{1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^7} \sim \sqrt{\frac{2g}{7\gamma}} r \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{r_0}{r} \right)^7 \dots \right). \quad (6.18)$$

Consideriamo ora gli effetti della resistenza dell'aria. Aggiungiamo il termine di *drag*

$$f_D(v) = -\frac{1}{2} C_D A \rho_a v^2 \quad (6.19)$$

dove la densità dell'aria  $\rho_a = 0.8 \text{kg/m}^3$ . Adesso

$$m \frac{dv}{dt} = m g - v \frac{dm}{dt} - \frac{1}{2} C_D A \rho_a v^2 \quad (6.20)$$

e quindi

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{v}{m} \frac{dm}{dt} - \frac{1}{2m} C_D \rho_a A v^2 \quad (6.21)$$

In particolare notiamo

$$\left| \frac{f_D}{m} \right| = \frac{1}{2m} C_D \rho_a A v^2 = \frac{8}{3} \frac{\rho_a}{\rho_d} C_D \frac{v^2}{r} \quad (6.22)$$

Un modello che sembra compatibile con gli esperimenti è (*Edwards et al.*)

$$\frac{dm}{dt} = \pi \rho_m r^2 v \quad (6.23)$$

dove  $\rho_m \sim 10^{-3} \text{kg/m}^3$  è la densità della nebbia. Quindi in questo modello, siccome  $\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{4}{3} \pi \rho_d r^3$ , troviamo  $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4} \frac{\rho_m}{\rho_d} v$ . Pertanto questo modello rientra nel caso precedente con  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$  e  $\gamma = \frac{1}{4} \frac{\rho_m}{\rho_d}$ .

Torniamo al caso generale. Abbiamo

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = g - 3\gamma r^{\alpha-1} v^{\beta+1} - \frac{3}{8} \frac{\rho_a}{\rho_d} C_D \frac{v^2}{r} \\ \frac{dr}{dt} = \gamma r^\alpha v^\beta \end{cases} \quad (6.24)$$

Possiamo prendere  $\rho_d = 10^3 \text{kg/m}^3$ .

Nel modello illustrato da *Edwards et al.* il parametro  $C_D$  dipende dal numero di Reynolds. Questo è un caso particolare del moto di un oggetto in un fluido. In questo caso il coefficiente di drag ha la forma

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V L} \quad (6.25)$$

dove  $V$  e  $L$  sono scale di velocità e lunghezza caratteristiche per l'oggetto e il suo moto. Questo coefficiente può essere legato al numero di Reynolds

$$\text{Rey} = \frac{\rho L V}{\eta} = \frac{L V}{\nu} \quad (6.26)$$

dove  $\eta$  è la viscosità e  $\nu$  la viscosità cinematica. Questa struttura è ottenuta scrivendo le equazioni del moto di un oggetto in un fluido, equazioni complicate e in generale alle derivate parziali. Ottenute queste equazioni si possono riscrivere le lunghezze e le velocità, dividendole per dei parametri caratteristici  $L$  e  $V$ , ottenendo così equazioni differenziali per funzioni adimensionali. Questo è il significato di lunghezza e velocità caratteristiche. In questo cambio di variabile, si vede che le equazioni differenziali dipendono da un parametro, che è  $\text{Rey}$ . L'idea alla base di queste ridefinizioni, è che diverse combinazioni di fluido e oggetto danno luogo alle stesse equazioni differenziali, con lo stesso valore di  $\text{Rey}$ . Ci aspettiamo che situazioni che portano allo stesso  $\text{Rey}$  abbiano lo stesso comportamento (laminare, turbolento, fluido Newtoniano...)<sup>5</sup>. In generale la relazione tra  $C_D$  e  $\text{Rey}$  è determinata empiricamente.

Secondo *Edwards et al* possiamo prendere

$$C_D = \frac{12}{\text{Rey}} = 12 \left( \frac{2rv}{\nu} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (6.27)$$

Introduciamo il parametro  $\delta = \frac{9}{2^{3/2}} \frac{\rho_a}{\rho_d} \sqrt{\nu}$ . Allora il sistema (6.24) diventa nel caso EWS ( $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$  e  $\gamma = \frac{1}{4} \frac{\rho_m}{\rho_d}$ .)

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = g - 3\gamma \frac{v^2}{r} - \delta \left( \frac{v}{r} \right)^{\frac{3}{2}} \\ \frac{dr}{dt} = \gamma v \end{cases} \quad (6.28)$$

dove valori sperimentali sono  $\delta = 0.0124$  e  $\gamma = 2.5 \cdot 10^{-7}$ .

Anche in questo caso troviamo una velocità terminale, per cui  $\frac{dv}{dt} = 0$ . Per  $r$  grandi, otteniamo  $\frac{v}{r} \sim \left( \frac{g}{\delta} \right)^{2/3}$ .

---

<sup>5</sup>Si veda ad esempio R. Teman, A. Miranville *Mathematical modelling in continuum mechanics*, Cambridge University Press 2005.