

Modelli - Parte 3

Michele Cirafici

*Dipartimento di Matematica e Geoscienze & INFN & IGAP,
Trieste, Italy*

Email: `mcirafici@units.it`

Dispense per uso interno

Indice

1	Elementi di statica dei continui unidimensionali deformabili	1
2	Barra elastica in compressione, o bastone da passeggio	2
3	Catena	5
4	Politropi e struttura stellare	7
1	Elementi di statica dei continui unidimensionali deformabili	

Ci occuperemo adesso di alcuni problemi elementari di meccanica dei continui. La teoria generale è un argomento troppo vasto per essere trattato in questo corso. Ci limiteremo ad alcune considerazioni sulla statica di sistemi continui unidimensionali.

Consideriamo quindi un arco piano e incomprimibile, quindi di lunghezza fissa L . Supponiamo che su quest'arco agiscano un sistema di forze esterne, individuato da una risultante \mathbf{R}^{ext} e un momento risultante \mathbf{M}^{ext} , e che l'arco sia in equilibrio sotto l'azione di queste forze. La configurazione di equilibrio sarà in generale una *deformazione* della configurazione di equilibrio in assenza di forze esterne. Consideriamo solamente un tratto dell'arco, parametrizzato per esempio da una parametro $s \in [0, L]$. L'ipotesi che questo tratto sia in equilibrio, e che su di esso agiscano delle forze esterne, implica che queste forze devono essere controbilanciate da forze analoghe, esercitate su di esso dalla porzione rimanente dell'arco.

Parametizziamo la forma dell'arco nel piano x, y con equazioni parametriche $x = x(s)$ e $y = y(s)$ (continue e differenziabili, cioè no spigoli) con $s \in [0, L]$. Il versore tangente $\mathbf{t}(s) = \frac{dx}{ds}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{ds}\mathbf{e}_y$ è normalizzato ad uno e quindi $(\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2 = 1$.

Sforzi interni. La condizione di equilibrio è una condizione di bilancio: alle forze esterne agenti sull'arco devono corrispondere, affinché ci sia equilibrio, degli *sforzi interni* (o azioni interne) $\mathbf{R}^{\text{int}}(s)$ e $\mathbf{M}^{\text{int}}(s)$. Supponiamo che l'arco abbia un certo profilo. È utile decomporre gli sforzi interni nel modo suggerito dalla geometria, cioè ad un punto dell'arco parametrizzato da un'ascissa curvilinea $s \in [0, L]$, $\mathbf{R}^{\text{int}}(s) = T(s)\mathbf{t} + S(s)\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{t}$. Qui \mathbf{t} è il versore tangente alla curva che descrive il profilo dell'arco, \mathbf{e}_z il versore ortogonale al piano dell'arco. Le quantità scalari $T(s)$ e $S(s)$ sono la tensione e lo sforzo di taglio (*shear*). A seconda del segno, la tensione rappresenta compressione o trazione. Similmente $\mathbf{M}^{\text{int}} = M(s)\mathbf{e}_z$ dove la quantità $M(s)$ è detta momento flettente.

Equazioni differenziali per gli sforzi interni. Per derivare una serie di equazioni differenziali per gli sforzi interni, è utile dividere le forze esterne in forze distribuite, date da una funzione lungo tutta l'arco, e forze concentrate, definite solo in un punto. In queste note considereremo solo il primo caso, e denotiamo con $\mathbf{f}(s)$ le forze distribuite lungo l'arco.

Imponendo il bilancio delle forze lungo l'arco troviamo il sistema di equazioni differenziali (o *equazioni indefinite di equilibrio*)

$$\frac{d}{ds} \mathbf{R}^{\text{int}}(s) = -\mathbf{f}(s), \quad (1.1)$$

$$\frac{d}{ds} M(s) = -S(s). \quad (1.2)$$

In queste equazioni le incognite sono gli sforzi interni $\mathbf{R}^{\text{int}}(s)$ e $M(s)$ e la forma dell'arco nella configurazione di equilibrio. Per risolvere queste equazioni bisogna specificare una *relazioni costitutiva del materiale*.

Derivazione. Vediamo la prima equazione (la seconda si deriva in modo simile). Consideriamo un arco la cui configurazione geometrica è descritta da un'ascissa curvilinea $s \in [0, L]$. Prendiamo un intervallo arbitrario $[s_1, s_2]$ e applichiamo le equazioni cardinali della statica a questo intervallo. Sull'intervallo agiscono lo sforzo $\mathbf{R}(s_2)$, applicato nel punto $\mathbf{x}(s_2)$ (cioè la forza che la parte dell'arco con $s > s_2$ esercita in s_2 sulla parte precedente per mantenere l'equilibrio), lo sforzo $-\mathbf{R}(s_1)$ applicato nel punto $\mathbf{x}(s_1)$ (cioè lo sforzo che la parte dell'arco con $s < s_1$ esercita sulla parte che segue, da cui il segno, per mantenere l'equilibrio) e le forze distribuite $\mathbf{f}(s)$. Quindi all'equilibrio

$$\mathbf{R}(s_2) - \mathbf{R}(s_1) + \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{f}(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{d}{ds} \mathbf{R}^{\text{int}}(s) + \mathbf{f}(s) \right) ds = 0. \quad (1.3)$$

Siccome questo integrale deve annullarsi per ogni scelta dell'intervallo $[s_1, s_2]$, segue la prima equazione differenziale per gli sforzi interni. La seconda si deriva in modo simile, usando l'equazione cardinale della statica per i momenti.

2 Barra elastica in compressione, o bastone da passeggio

Consideriamo il caso di un'asta elastica, sottoposta ad una forza di compressione. L'asta si trova in un piano, diretta lungo l'asse \mathbf{e}_x in assenza di sollecitazioni. Supponiamo di esercitare una forza $F_x = -p$ a *comprimere* l'asta in uno degli estremi. Allora l'asta si deforma secondo una curva $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$, che supporremo sufficientemente regolare. Se denotiamo con φ l'angolo che il versore tangente \mathbf{t} forma con \mathbf{e}_x , allora $\mathbf{t} = \cos \varphi(s) \mathbf{e}_x + \sin \varphi(s) \mathbf{e}_y$. Per essere concreti possiamo immaginare che questo modello corrisponda ad un bastone da passeggio: un estremo poggia in terra mentre noi siamo appoggiati sull'altro.

Ipotizziamo che la barra sia costituita di un materiale perfettamente elastico. L'equazione costitutiva è

$$M(s) = h\varphi'(s), \quad (2.1)$$

dove h è una costante, il coefficiente di flessibilità, e $\varphi'(s)$ rappresenta la curvatura della barra (cioè ricordiamo dalla geometria che $\rho = 1/\frac{d\varphi}{ds}$ è il raggio di curvatura). La relazione costitutiva di un materiale perfettamente elastico stabilisce un legame lineare tra la curvatura della barra e il momento flettente ed è quindi valida per piccole deformazioni, che sono reversibili.

Le equazioni per gli sforzi interni diventano allora

$$\frac{d}{ds} (T(s) \cos \varphi(s) - S(s) \sin \varphi(s)) = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{ds} (S(s) \cos \varphi(s) + T(s) \sin \varphi(s)) = 0, \quad (2.3)$$

$$h \frac{d^2}{ds^2} \varphi(s) + S(s) = 0. \quad (2.4)$$

Per risolvere queste equazioni dobbiamo imporre condizioni al contorno. Per gli estremi prendiamo condizioni di Neumann

$$\varphi'(0) = \varphi'(L) = 0, \quad (2.5)$$

corrispondenti a puro appoggio (potremmo imporre condizioni di Dirichlet, corrispondenti ad un incastro, o condizioni miste), per modellizzare la situazione del bastone da passeggio. Inoltre il bastone è soggetto ad una forza assegnata, ad esempio all'estremo B (cioè quando $s = L$): $\mathbf{R}(L) = -p \mathbf{e}_x$

$$\begin{aligned} T(L) \cos \varphi(L) - S(L) \sin \varphi(L) &= -p, \\ T(L) \sin \varphi(L) + S(L) \cos \varphi(L) &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

(potremmo dare la condizione analoga all'estremo A, determinata dalla reazione vincolare del piano). Se integriamo (2.2) e (2.3) da s a L , quest'ultima condizione implica

$$\begin{cases} (T(s) \cos \varphi(s) - S(s) \sin \varphi(s)) = -p \\ (S(s) \cos \varphi(s) + T(s) \sin \varphi(s)) = 0 \end{cases}, \quad \implies \quad \begin{cases} T(s) = -p \cos \varphi(s) \\ S(s) = p \sin \varphi(s) \end{cases}, \quad (2.7)$$

(avremmo potuto integrare da 0 a s , conoscendo la reazione vincolare in A dalle equazioni cardinali della statica). Quindi da (2.4) abbiamo ridotto il problema a

$$\varphi'' + \lambda \sin \varphi = 0, \quad (2.8)$$

con $\lambda = p/h$ e condizioni al contorno di Neumann. Se tralasciamo le condizioni al contorno questa è formalmente identica all'equazione del pendolo.

Notiamo che

$$\int_0^L ds \sin \varphi(s) = 0, \quad (2.9)$$

cioè i due estremi della barra rimangono lungo l'asse \mathbf{e}_x ($\sin \varphi$ è la componente della tangente lungo l'asse \mathbf{e}_y). Infatti se integriamo l'equazione (2.4) con $S(s)$ determinato come sopra, da 0 a L , troviamo

$$0 = h \varphi'(L) - h \varphi'(0) = -p \int_0^L ds \sin \varphi(s) \quad (2.10)$$

dove abbiamo usato le condizioni al contorno.

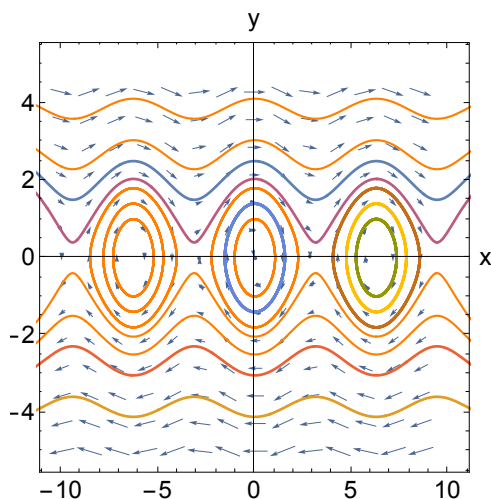


Figura 1: Pendolo

Possiamo passare dall'equazione differenziale al sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\lambda \sin x \\ y(0) = 0 \\ y(L) = 0 \end{cases} . \quad (2.11)$$

Le traiettorie sono illustrate in figura 1.

Problema linearizzato. Consideriamo ora il problema linearizzato vicino alla soluzione banale, approssimando $\sin \varphi \sim \varphi$ troviamo il problema

$$\varphi'' + \lambda \varphi = 0, \quad (2.12)$$

con condizioni al contorno di Neumann. L'integrale generale è

$$\varphi(s) = c_1 \sin \sqrt{\lambda} s + c_2 \cos \sqrt{\lambda} s. \quad (2.13)$$

Imponendo le condizioni al contorno $\varphi'(0) = \varphi'(L) = 0$ troviamo

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 \cos \sqrt{\lambda} L - c_2 \sin \sqrt{\lambda} L = 0 \end{cases}, \quad (2.14)$$

da cui vediamo che il problema ammette soluzione solamente per $\sqrt{\lambda} L = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$, e cioè per

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.15)$$

Consideriamo adesso una variazione, in cui la barra è incernierata al punto $s = 0$, cioè $\varphi(0) = 0$

(condizione di Dirichlet). Tuttavia supponiamo che sull'altro estremo si trovi un oggetto pesante (diciamo di dimensione caratteristica a) che incurva la barra: cioè nella situazione di equilibrio l'estremo B non giace più sulla verticale di A. Supponiamo ancora che il peso della barra stessa sia trascurabile. Per ottenere questa configurazione di equilibrio, deve esserci un momento non nullo all'estremo B

$$M(L) = a p \sin \varphi(L) \sim a p \varphi(L). \quad (2.16)$$

Insieme alla relazione costitutiva di elasticità $M(s) = h \varphi'(s)$, questo implica la condizione al contorno

$$\varphi'(L) = \frac{p a}{h} \varphi(L). \quad (2.17)$$

Nell'approssimazione di piccoli angoli troviamo quindi il problema al contorno

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda \varphi = 0 \\ \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(L) = \frac{p a}{h} \varphi(L). \end{cases} \quad (2.18)$$

Dobbiamo imporre le nuove condizioni al contorno sull'integrale generale

$$\varphi(s) = c_1 \sin \sqrt{\lambda} s + c_2 \cos \sqrt{\lambda} s. \quad (2.19)$$

Vediamo che $c_2 = 0$ e

$$\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} L = \frac{p a}{h} \sin \sqrt{\lambda} L. \quad (2.20)$$

Pertanto, se poniamo $x = L\sqrt{\lambda}$, abbiamo una soluzione per ogni valore di λ tale che

$$\tan x = \frac{L}{a} \frac{1}{x} \quad (2.21)$$

Questa equazione si può risolvere graficamente.

3 Catena

Consideriamo ora una catena, i cui due estremi sono fissati in due punti A e B (non sulla stessa verticale). La catena è soggetta solamente al proprio peso. Vogliamo usare le equazioni indefinite, che valgono all'equilibrio, per determinarne la forma. Dobbiamo quindi specificare delle relazioni costitutive.

Le caratteristiche principali di una catena, o di una fune, sono le seguenti. La catena è inestensibile, cioè ha una lunghezza fissa L . Questo è importante perché possiamo usare un parametro $s \in [0, L]$ per determinarne la forma. La catena si oppone ad essere tirata, ma non ad essere compressa. Inoltre non si oppone ad una sollecitazione di taglio o ad un momento di forza. Pertanto, per la catena, prendiamo le equazioni costitutive

$$T(s) > 0, \quad S(s) = 0, \quad M(s) = 0. \quad (3.1)$$

Allora le equazioni differenziali per gli sforzi interni diventano

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \left(T(s) \frac{dx}{ds} \right) = 0 \\ \frac{d}{ds} \left(T(s) \frac{dy}{ds} \right) = \rho g \end{cases}, \quad (3.2)$$

dove ρ è la densità e g l'accelerazione di gravità. Nel seguito assumeremo per semplicità che ρ sia una costante. Le funzioni $x = x(s)$ e $y = y(s)$ specificano la forma che la catena assume all'equilibrio, e vale la condizione di normalizzazione

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = 1. \quad (3.3)$$

Per finire le condizioni al contorno sono $x(0) = y(0) = 0$ e $x(L) = x_B$, $y(L) = y_B$.

Per capire come risolvere il problema e trovare la forma della configurazione di equilibrio, cambiamo variabile da $s \in (0, L)$ a $x \in (0, x_B)$. Dalla geometria del problema abbiamo che $\cos \varphi(s) > 0$ e quindi $\frac{dx}{ds} > 0$. Quindi la funzione $x = x(s)$ è invertibile e possiamo prendere x come variabile indipendente. Per risolvere il problema vogliamo trovare $y = y(x)$.

Dobbiamo ora riscrivere il nostro sistema differenziale in questa nuova variabile. Poi dovremmo riscrivere le condizioni al contorno.

La prima equazione diventa

$$\frac{dx}{ds} \left[\frac{d}{dx} T(x) \cos \varphi(x) \right]_{x=x(s)} = 0 \quad (3.4)$$

da cui vediamo

$$T = T_0 \frac{1}{\cos \varphi} = T_0 \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (3.5)$$

con T_0 costante di integrazione. Quindi conoscendo $y = y(x)$, la tensione è nota lungo la catena. Per la seconda equazione abbiamo

$$\frac{dx}{ds} \left[\frac{d}{dx} T(x) \sin \varphi(x) \right]_{x=x(s)} = g \rho \quad \implies \quad \left[\frac{d}{dx} T(x) \sin \varphi(x) \right]_{x=x(s)} = g \rho \frac{1}{\cos \varphi} \quad (3.6)$$

che usando la prima equazione è equivalente a

$$\left[\frac{d}{dx} T_0 \tan \varphi(x) \right]_{x=x(s)} = g \rho \frac{1}{\cos \varphi} \quad \implies \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{g \rho}{T_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (3.7)$$

Per le condizioni al contorno abbiamo sempre $y(0) = 0$, e ora $y(x_B) = y_B$. Tuttavia dalla condizione $x(L) = x_B$ (quando $x = x(s)$ è pensata funzione di s) abbiamo

$$L = \int_0^L ds = \int_0^{x_B} dx \frac{ds}{dx} = \int_0^{x_B} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}. \quad (3.8)$$

Poniamo per semplicità $\frac{g\rho}{T_0} = k$ e consideriamo la seconda equazione, $y'' = k\sqrt{1+(y')^2}$ (denotando così la derivata rispetto a x). Se poniamo $y' = \sinh z$ e sostituiamo, troviamo la condizione $z' = k$, risolta da $z = kx + c_1$. Pertanto

$$y'(x) = \sinh(kx + c_1) \quad \Longrightarrow \quad y(x) = c_2 + \frac{1}{k} \cosh(kx + c_1), \quad (3.9)$$

che da l'equazione della catenaria. Imponiamo le condizioni al contorno

$$y(0) = 0 \Longrightarrow y(x) = \frac{1}{k} (\cosh(kx + c_1) - \cosh c_1) \quad (3.10)$$

$$y(x_B) = y_B \Longrightarrow ky_B = \cosh(kx_B + c_1) - \cosh c_1 \quad (3.11)$$

$$L = \int_0^{x_B} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \Longrightarrow kL = \sinh(kx_B + c_1) - \sinh c_1 \quad (3.12)$$

Le costanti di integrazione sono c_1 e T_0 (in k). Se poniamo $\beta = kx_B/2$ e $\alpha = c_1 + \beta$ troviamo

$$\frac{1}{2} (\cosh(\alpha + \beta) - \cosh(\alpha - \beta)) = \sinh \alpha \sinh \beta = \beta \frac{y_B}{x_B} \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{2} (\sinh(\alpha + \beta) - \sinh(\alpha - \beta)) = \cosh \alpha \sinh \beta = \beta \frac{L}{x_B} \quad (3.14)$$

da cui

$$\tanh \alpha = \frac{y_B}{L} \quad (3.15)$$

$$\sinh \beta = \frac{\beta L}{x_B \cosh \alpha} = \frac{\beta}{x_B} \sqrt{L^2 - y_B^2} \quad (3.16)$$

che fissa unicamente i parametri.

4 Politropi e struttura stellare

Il modo più semplice di pensare ad una stella è come ad una massa di gas in equilibrio, dove l'attrazione gravitazionale che tende a fare collassare la stella in un punto è bilanciata dalla pressione interna del gas. Questa situazione si dice di *equilibrio idrostatico*. Consideriamo una versione approssimata, in cui densità e pressione della stella siano funzioni solamente del raggio (cioè ci sia simmetria sferica), e in particolare non della temperatura della stella. Allora scriviamo

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= -\frac{GM_r}{r^2} \rho(r) \\ \frac{dM_r}{dr} &= 4\pi r^2 \rho(r) \end{aligned} \quad (4.1)$$

che possono essere combinate nell'equazione (di Poisson)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho. \quad (4.2)$$

Esattamente come nelle Sezioni precedenti, per risolvere questa equazione dobbiamo ipotizzare una relazione tra le due funzioni $P = P(r)$ e $\rho = \rho(r)$. Un esempio è la relazione politropica

$$P = K \rho^\gamma = K \rho^{1+\frac{1}{n}}, \quad (4.3)$$

dove $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$ è un parametro e n è detto l'indice politropico. Imponiamo condizioni iniziali

$$\begin{aligned} \rho(r=0) &= 0, \\ \frac{d\rho}{dr}\Big|_{r=0} &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Introduciamo variabili adimensionali

$$\rho = \rho_c \theta^n, \quad P = P_c \theta^{n+1}, \quad r = \alpha \xi, \quad (4.5)$$

dove ρ_c e P_c sono parametri al centro della stella, ξ è la nuova variabile radiale e

$$\alpha^2 = \frac{K(n+1) \rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G}. \quad (4.6)$$

In questo modo troviamo l'equazione di Lane-Emden

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n. \quad (4.7)$$

Per questa equazione prendiamo le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} \theta(\xi=0) &= 1, \\ \frac{d\theta}{d\xi}\Big|_{\xi=0} &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

In generale non esistono soluzioni analitiche. Si può dimostrare che per $n < 5$ la soluzione $\theta = \theta(\xi)$ decresce monotonamente e arriva a zero ad un certo valore $\theta(\xi_n)$, che rappresenta la superficie della stella.

Tre soluzioni analitiche sono note, $n = 0, 1, 5$

$$\begin{aligned} n=0, \quad \theta &= 1 - \frac{\xi^2}{6}, \quad \xi_0 = \sqrt{6}, \\ n=1, \quad \theta &= \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad \xi_1 = \pi, \\ n=5, \quad \theta &= \left(1 + \frac{\xi^2}{3} \right)^{-1/2}, \quad \xi_n = \infty. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Notiamo che per $n = 5$ il raggio della stella è infinito. In generale la soluzione e il valore di ξ_n vanno determinate numericamente

Se modelliamo il gas dentro la stella come un gas perfetto, allora la pressione è proporzionale alla temperatura T . Secondo la legge dei gas perfetti $PV = Nk_B T$, con N il numero di molecole del

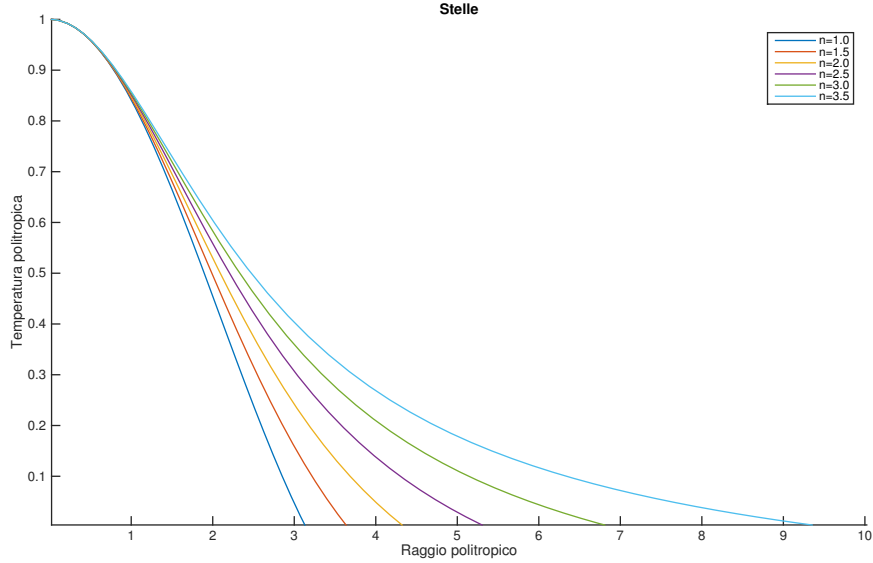


Figura 2: Temperatura di una stella in funzione del raggio, per valori diversi dell'indice politropico.

gas e k_B la costante di Boltzmann. Se pensiamo che le molecole abbiano una massa media μ_m , possiamo esprimere il numero totale di molecole in funzione della massa totale $N = M/\mu_m$. Quindi, a meno di fattori numerici $P \sim \rho T$. Siccome $P \sim \theta^{n+1}$ e $\rho \sim \theta^n$, vediamo che $T \sim \theta$. Il parametro θ può anche essere interpretato come la *temperatura politropica*. La temperatura fisica sarà quindi $T = T_c \theta$. La temperatura alla superficie della stella può essere misurata grazie alla relazione (di Stefan-Boltzmann)

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{sup}}^4 \quad (4.10)$$

dove $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{Wm}^{-2} \text{K}^{-4}$ è la costante di Stefan-Boltzmann e L è detta *luminosità* e corrisponde all'energia emessa nell'unità di tempo. Altre proprietà della stella sono il raggio fisico

$$R = \alpha \xi_n = \left(\frac{K}{G} \frac{n+1}{4\pi} \right)^{1/2} \rho_c^{\frac{1-n}{2n}} \xi_n, \quad (4.11)$$

e la massa

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr = 4\pi \alpha^3 \rho_c \int_0^{\xi_n} \xi^2 \theta^n d\xi \\ &= 4\pi \alpha^3 \rho_c \int_0^{\xi_n} \left(-\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) \right) d\xi = 4\pi \left(\frac{K}{G} \frac{n+1}{4\pi} \right)^{3/2} \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} \left(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_n}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Queste quantità possono essere misurate in modo indipendente (ad esempio la massa dall'attrazione gravitazionale e dalle orbite delle stelle vicine, il raggio dall'osservazione comparando con le stelle vicine), e usate per fissare i parametri K , ρ_c e P_c . In figura 2 mostriamo l'andamento della temperatura politropica θ in funzione del raggio ξ , per diversi valori dell'indice politropico. Nonostante la semplicità del modello, il valore $n = 3$ è compatibile con le proprietà osservate del Sole.